MPSI 1 - DS 3 - 02/12/2021

Consignes générales :

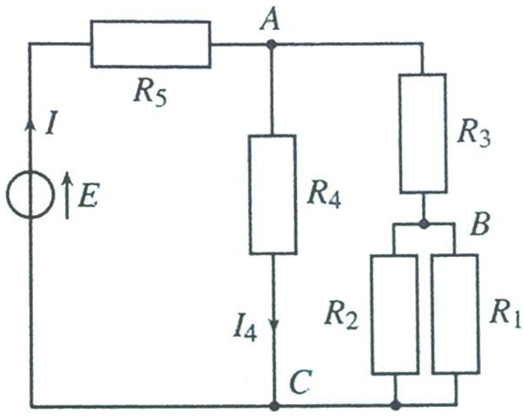
- L'ordre est indifférent, mais on séparera clairement les exercices ;
- il est conseillé de tous les aborder (difficulté progressive dans un exercice).
- Toute question, même qualitative, appelle une réponse argumentée.
- La qualité de la rédaction (*français* et *écriture mathématique*) sera notée.
- La qualité de la présentation également : soin, aération, $\boxed{\text{résultats encadrés}}$.
- Une application numérique sans unité explicite et appropriée ne sera pas prise en compte.
- Pour le nombre de chiffres significatifs à conserver pour le résultat final, on s'aligne sur la donnée la moins précise, avec au moins 2 chiffres significatifs (sauf indication contraire).

1- CIRCUIT RÉSISTIF et DIVISEURS

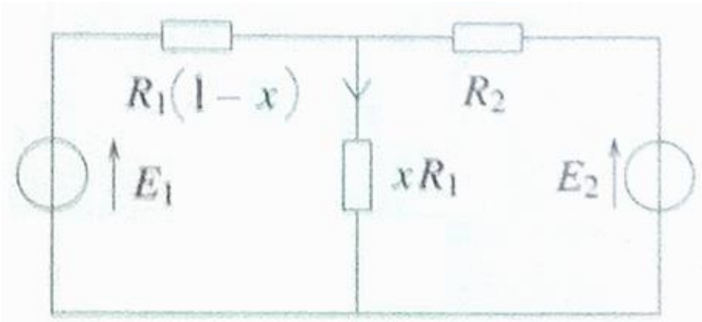
Données : $E = 10$ V, $R_5 = 50\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_1 = 12\ \Omega$.

Calculer les grandeurs suivantes avec 3 chiffres significatifs ; on effectuera les A.N. de proche en proche :

- les résistances équivalentes entre B et C, et entre A et C ;
- les intensités I et I_4 , les tensions U_{AC} et U_{BC} ;
  NB : l'ordre de calcul est indifférent.



2- CIRCUIT à DEUX GÉNÉRATEURS



1) Établir les deux équations entre les données du circuit (tensions et résistances nommées sur la figure) et les intensités I_1 et I_2 parcourant les deux sources *en convention générateur*.

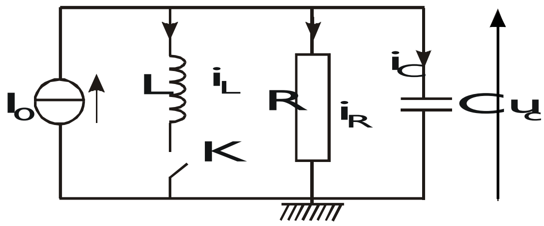
2) En déduire les expressions de ces deux intensités en fonction des données.

3) Sachant que $0 < x < 1$, à quelle condition peut-on annuler l'intensité I_2 ? En déduire une méthode de mesure d'une f.é.m. E_2 inconnue, les autres éléments du circuit étant connus.

4) Dans le cas où il est possible d'annuler I_2, que peut-on dire du fonctionnement de la source E_2, selon la valeur prise par x dans l'intervalle [0,1] ?

5) On donne $E_1 = 9$ V, $E_2 = 3$ V, $R_1 = 60\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$; on désigne par *i* l'intensité dans xR_1, orientée dans le sens de la flèche ; exprimer la fonction <u>numérique</u> *i(x)* ; que vérifie-t-on pour ce qui est de son signe sur l'intervalle [0,1] (justifier la cohérence) ?

3- RÉGIME TRANSITOIRE DU 2E ORDRE



On étudie le montage ci-contre ; le générateur de courant est idéal, de courant électromoteur constant I_0.

Les dipôles passifs sont idéaux.

1) Déterminer les quatre grandeurs électriques indiquées en régime stationnaire, l'interrupteur K étant ouvert.
2) A l'instant $t = 0$, l'interrupteur est fermé instantanément ; déterminer les valeurs des quatre grandeurs précédentes juste après la fermeture, à $t = 0^+$.
3) Déterminer, par des raisonnements simples et un minimum de calculs, les valeurs de ces grandeurs lorsque $t \to +\infty$.
4) Établir l'équation différentielle liant $u_c(t)$ à ses dérivées temporelles.
   Faire apparaître les grandeurs $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$.

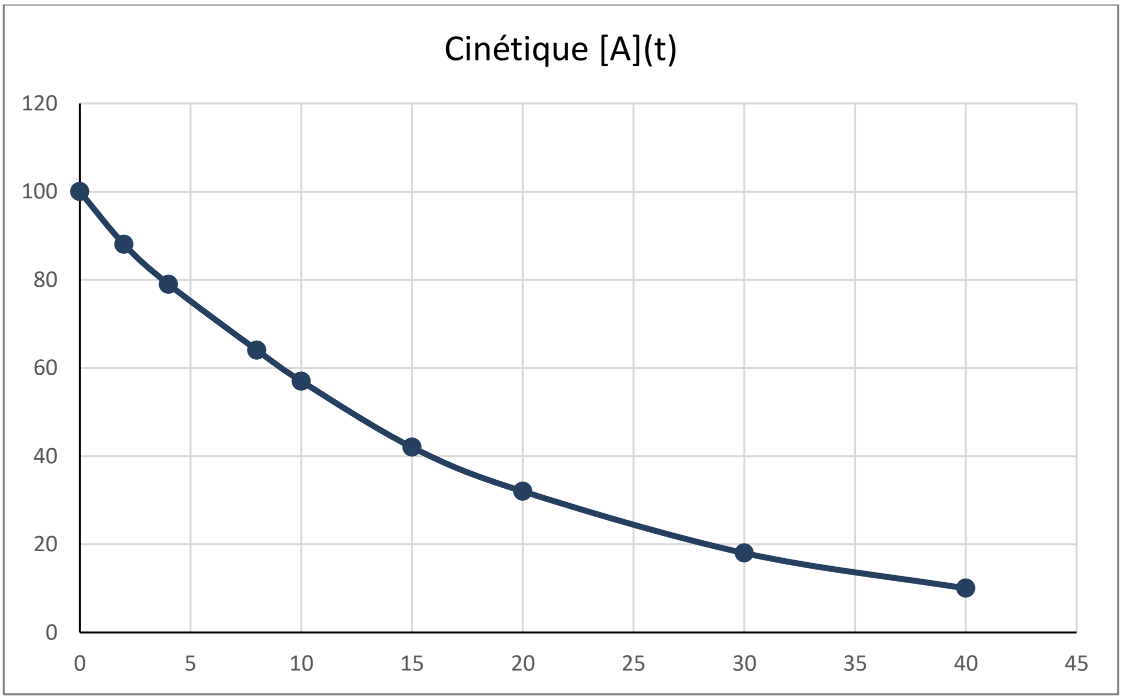
   Préciser l'expression du facteur de qualité Q en fonction de R, L, C.
5) On donne les valeurs : $R = 10\ k\Omega$; $C = 1{,}0\ \mu F$; $L = 10\ mH$.
   Calculer la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 du circuit, ainsi que les valeurs du coefficient d'amortissement λ et du facteur de qualité Q.
   Sans calculs, que peut-on prévoir sur le comportement du circuit en régime transitoire ?
6) Vérifier que le régime transitoire pour $t \geq 0$ est pseudo-périodique. Montrer qu'avec la précision des données, la pseudo-pulsation est indiscernable de la pulsation propre.
7) Déterminer complètement $u_c(t)$ et en donner une expression approchée.
8) Expliquer comment on utiliserait un enregistrement de $u_c(t)$ pour en déduire la valeur de Q.

4- CINÉTIQUE DU PREMIER ORDRE

La vitesse d'une réaction symbolisée par le bilan A + B → C, réalisée dans un solvant adapté, ne dépend pas de la concentration en réactif B.

L'évolution de la concentration *a(t)* en réactif A est donnée ci-dessous, la courbe représentant les valeurs du tableau, obtenues à 25°C :

t en heures	0	2	4	8	10	15	20	30	40
a en mmol/L	100	88	79	64	57	42	32	18	10



1) Estimer *la vitesse initiale* de disparition de A, et donc la vitesse initiale de la réaction, ainsi que le temps de demi-réaction $t_{½}$. En supposant celle-ci d'ordre 1, en déduire de deux manières la valeur approximative de la constante de vitesse ; commenter.
2) Avec cette hypothèse d'ordre, quelle est la loi théorique d'évolution *a(t)* ?
   Valider cette loi par régression linéaire, et donner une valeur plus précise de *k* et $t_{½}$.
3) Dans les mêmes conditions mais à 50°C, le temps de demi-réaction est de 56 min.
   Déterminer la constante de vitesse à cette température, puis en déduire l'énergie d'activation E_a de la réaction. On rappelle R = 8.31 J·K^{-1}·mol^{-1}.
4) À une température nettement plus élevée, toutes les espèces sont gazeuses et le mécanisme réactionnel est modifié, de sorte que la réaction devient d'ordre 1 par rapport à chaque réactif. Les deux réactifs sont introduits en même quantité dans un récipient vide de volume fixé, de sorte que la pression initiale est P_0 avec $[A](t=0) = [B](t=0) = a_0$.
   Déterminer l'évolution de la pression *P(t)* dans le récipient en fonction de P_0, *a*, *k* ; commenter.
   NB : cette question étant indépendante des précédentes, on pourra à nouveau noter *k* la constante de vitesse nécessaire.

– = FIN = –

1- CIRCUIT RÉSISTIF et DIVISEURS

Circuit résistif

1) $R_{BC} = "R_1 // R_2" = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = \underline{7{,}50\ \Omega}$

$R_{AC} = "R_4 // (R_3+R_{BC})"$ soit $\underline{R_{AC} \simeq 19{,}4\ \Omega}$

2) $I = E/R_{éq}$ où $R_{éq} = R_5 + R_{AC}$ donc $\underline{I \simeq 144\ mA}$

- $U_{AC} = E - R_5 I$: $\underline{U_{AC} \simeq 2{,}79\ V}$ $= R_4 I_4 \Rightarrow \underline{I_4 \simeq 69{,}8\, mA}$
- U_{BC} divise U_{AC} : $U_{BC} = \frac{R_{BC}}{R_{BC}+R_3} U_{AC}$: $\underline{U_{BC} \simeq 558\ mV}$

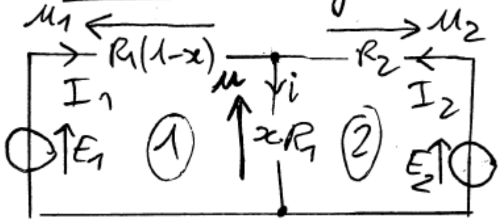
NB : d'autres approches sont possibles, par exemple :

- $U_{AC} = \frac{R_{AC}}{R_{AC}+R_5} E = \frac{1}{1+R_5/R_{AC}} E \simeq \underline{2{,}79\ V}$
- U_{BC} divise U_{AC} : $U_{BC} = \frac{R_{BC}}{R_3+R_{BC}} U_{AC} \simeq \underline{558\, mV}$
- $I_4 = \frac{U_{AC}}{R_4}$ et $I = \frac{E-U_{AC}}{R_5} \simeq \underline{144\ mA}$.

2- CIRCUIT à DEUX GÉNÉRATEURS

Circuit à deux générateurs

1)



• LDM dans 1 et 2 :

$$\begin{cases} E_1 = u_1 + u \\ E_2 = u_2 + u \end{cases}$$

• LDN : $i = I_1 + I_2$

d'où les deux éqns :

$$\begin{cases} E_1 = R_1(1-x)I_1 + xR_1 i = R_1 I_1 + x R_1 I_2 \\ E_2 = R_2 I_2 + x R_1 i = x R_1 I_1 + (R_2 + x R_1) I_2 \end{cases}$$

2) Par substitution il vient :

$$I_2 = \frac{E_2 - x E_1}{R_2 + R_1 x(1-x)} \quad \text{et} \quad I_1 = \frac{E_1\left(x + \frac{R_2}{R_1}\right) - x E_2}{R_2 + R_1 x (1-x)}.$$

3) $I_2 = 0 \Leftrightarrow x = E_2/E_1$ ce qui est possible ssi $\underline{E_2 < E_1}$

On peut placer un galvanomètre (détecteur de faible i) dans la branche de E_2 et, par tâtonnements, ajuster la valeur de x pour annuler I_2. On a alors $\underline{E_2 = x \cdot E_1}$.

4) Si $x < \frac{E_2}{E_1}$: $I_2 > 0$, la source fonctionne en générateur.

Si $x > \frac{E_2}{E_1}$: $I_2 < 0$, — — — récepteur forcé.

5) $I_2 = \frac{3-9x}{30+60\cdot x(1-x)} = \frac{1-3x}{10+20x(1-x)}$ (A)

$I_1 = \frac{-3x+9\left(x+\frac{1}{3}\right)}{30+60x(1-x)} = \frac{2x+1}{10+20x(1-x)}$ (A)

et $i = I_1 + I_2$

soit $i = \frac{2-x}{10+20x(1-x)}$

4- CINÉTIQUE DU PREMIER ORDRE

Cinétique ordre 1 puis 2

1) $v_{disp}(t=0) \simeq \frac{a_0 - a(2)}{2}$ en assimilant la courbe à sa tangente à l'origine.

$v_0 = v_{disp}(A)$ car le coefficient stoechiométrique vaut 1 : $v_0 \simeq 6$ mmol/h.

Par lecture des coordonnées pour $a(t_{1/2}) = a_0/2$, on obtient $t_{1/2} \simeq 12{,}5\,h$.

Ordre 1 : $\left\{\begin{array}{l} v = ka \text{ donc } k = v_0/a_0 \simeq 0{,}06\,h^{-1} \\ t_{1/2} = \ln 2/k \text{ donc } k \simeq 0{,}056\,h^{-1} \end{array}\right.$ ces valeurs sont cohérentes entre elles.

2) Loi théorique : $a(t) = a_0 e^{-kt} \Leftrightarrow \ln\frac{a(t)}{a_0} = -k.t$: on trace $Y = \ln\frac{a(t)}{a_0}$ en fonction de $X = t$

La droite obtenue valide l'hypothèse et $k \simeq 0{,}057\,h^{-1}$. ($R^2 = 0{,}9999 \ldots !$) $\rightarrow \boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = 12{,}1\,h}$

3) Loi d'Arrhénius : $k(T) = C^{te}.e^{-E_a/RT} \Rightarrow \frac{k(T_2)}{k(T_1)} = \frac{t_{1/2}(T_1)}{t_{1/2}(T_2)} = e^{-\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}$

A.N. : $\boxed{E_a \simeq 82\,kJ/mol}$

4) $v = k[A][B] = k\left(\frac{n_0-\xi}{V}\right)^2$ car $n_0(A) = n_0(B)$.

$\neq k$ précédent.

$= v_{disp}(A) \rightarrow -\frac{d\,a(t)}{dt} = k \cdot a(t)^2$

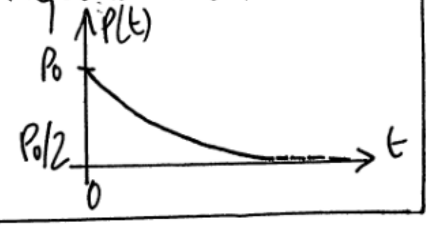
Cette E.D. conduit à $\frac{1}{a} = \frac{1}{a_0} + k.t \Leftrightarrow \boxed{a(t) = \frac{a_0}{1+a_0kt}}$

La pression dans le récipient est $\frac{n_{total}.RT}{V}$ (mélange idéal)

Or $\frac{n_{gaz}}{V} = [A]+[B]+[C] = \underbrace{(a_0-x)}_{=a(t)} + (a_0-x)+x = 2a_0-x = a_0+a(t)$.

$\left.\begin{array}{l}\text{Alors } P(t) = (a_0+a(t))RT \\ \text{avec } P_0 = 2a_0 \cdot RT\end{array}\right\} \Rightarrow P(t) = \frac{a_0+a(t)}{2a_0}P_0 = \boxed{\frac{2+a_0kt}{2+2a_0kt}P_0}$.

On observe que $P_\infty = P_0/2$, en accord avec l'équation-bilan.



3- RÉGIME TRANSITOIRE DU 2^{E} ORDRE

1) et 2) L'intensité i_L est continue, or à $t=0^-$ l'interrupteur est ouvert donc : $\boxed{i_L\left(0^+\right)=i_L\left(0^-\right)=0}$.
Le condensateur est chargé car alimenté depuis longtemps par la source de courant. Le courant qui y circule est nul : $\boxed{i_c\left(0^-\right)=0}$. La loi des nœuds implique $\boxed{i_R\left(0^-\right)=I_0-i_L\left(0^-\right)-i_c\left(0^-\right)=I_0}$. La tension aux bornes du condensateur est celle aux bornes de la résistance soit $u_c\left(0^-\right)=RI_0$. La **continuité** de la tension aux bornes du condensateur s'exprime par $\boxed{u_c\left(0^+\right)=RI_0}$. Il vient donc $\boxed{i_R\left(0^+\right)=I_0}$ et $\boxed{i_c\left(0^+\right)=0}$.

3) En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil (car $u_L=\dfrac{di}{dt}=0$) et court-circuite les autres composants : $\boxed{u_c(t\to\infty)=0}$ et $\boxed{i_R(t\to\infty)=i_c(t\to\infty)=0}$; alors $\boxed{i_L=I_0-i_R(t\to\infty)-i_c(t\to\infty)=I_0}$.

4) Nous devons utiliser quatre équations décrivant ce circuit :

- la **loi des nœuds** : $I_0=i_c+i_L+i_R$ (1)
- les **caractéristiques des dipôles** (convention récepteur) :
  $u_R=Ri_R=u_c\,(2)$, $u_L=Ldi_L/dt=u_c\,(3)$ et $i_c=Cdu_c/dt\,(4)$

Pour trouver l'équation différentielle, il faut exprimer les courants i_L, i_R, i_c en fonction de u_c.
Le problème vient de la bobine car lorsque l'on calcule une primitive, elle est définie à une constante près.
Pour éviter d'introduire ainsi une inconnue supplémentaire, **on dérive** la relation (1) : $0=\dfrac{di_c}{dt}+\dfrac{di_L}{dt}+\dfrac{di_R}{dt}$(1). Il vient : $0=C\dfrac{d^2u_c}{dt^2}+\dfrac{u_c}{L}+\dfrac{1}{R}\dfrac{du_c}{dt}$.
Il suffit de classer les dérivées pour faire apparaître les coefficients λ et ω_0 :

$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{du_c}{dt}+\frac{u_c}{LC}=\frac{d^2u_c}{dt^2}+2\lambda\frac{du_c}{dt}+\omega_0^2u_c=0}.$$

5) Numériquement, $\boxed{\omega_0=10^4\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$ et par suite $\boxed{T_0=2\pi/\omega_0=6{,}28\cdot10^{-4}\ \text{s}}$.
L'amortissement est très faible car $\boxed{2\lambda=100\ \text{s}^{-1}}$; $\boxed{Q=\dfrac{\omega_0}{2\lambda}=RC\,\omega_0=100}$: nombreuses oscillations.
5) Avec $\lambda<<\omega_0$, le discriminant du polynôme caractéristique est négatif : **régime pseudo-périodique**.
6) En régime pseudo-périodique, $u_c(t)=e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right)$ où les constantes d'intégration A et B dépendent des conditions initiales, et où ω est **la pseudo-pulsation** : $\boxed{\omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}$.
Numériquement, $\boxed{\omega=9999{,}5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$: le nombre de C.S. n'est pas justifié et nous retrouvons $\boxed{\omega\approx\omega_0}$.

7) Pour déterminer complètement $u_c(t)$, il faut les valeurs initiales $u_c(0)$ et $\dfrac{du_c}{dt}(0)$.
Reportons-nous à la question 1 : à $t=0^+$, $u_c\left(0^+\right)=RI_0$ et $\dfrac{du_c}{dt}\left(0^+\right)=\dfrac{i_c\left(0^+\right)}{C}=0$.
Or $\dfrac{du_c}{dt}(t)=-\lambda e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right)+\omega e^{-\lambda t}\left(-A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)\right)$.
A l'instant initial, il vient, d'une part $A=RI_0$ (1) et d'autre part, $-\lambda A+\omega B=0\,(2)$, soit $B=\dfrac{\lambda A}{\omega}=\dfrac{\lambda}{\omega}RI_0$. La solution complète est donc : $\boxed{u_c(t)=RI_0e^{-\lambda t}\left(\cos(\omega t)+\dfrac{\lambda}{\omega}\sin(\omega t)\right)}$.
8) En utilisant un grand nombre n d'oscillations, on mesure le décrément logarithmique $\boxed{\delta=\frac{1}{n}ln\frac{A_{k+n}}{A_k}}$, et on en déduit la valeur de Q car $\boxed{\delta={}^{\pi}/_{Q}}$ lorsque le facteur de qualité est grand (cf. courbe ci-dessous).
4

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def f1(t,la=50,om=10000):
    return np.exp(-la*t)*(np.cos(om*t)+la/om*np.sin(om*t))

def f2(t,la=50,om=10000):
    return np.exp(-la*t)*(np.cos(om*t))

dates = np.linspace(0,0.042,1233)
y1 = f1(dates) ; y2 = f2(dates)

plt.close()
plt.figure('Transitoire peu amorti')
#plt.plot(dates,y1)
plt.plot(dates,y2,label='0 < t < 42 ms')
plt.legend()
plt.title('Transitoire peu amorti')
plt.show()
```